

Ege Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Tekstil Mühendisliği Bölümü

Akışkanlar Mekaniği Ders Notu

Ders08-Konu: **Kütle-Bernoulli Denklemi**

Prof.Dr.Hüseyin GÜNERHAN

<https://www.huseyingunerhan.com/>

Bu ders notu Dr.Hüseyin GÜNERHAN tarafından hazırlanmış ve her sayfası izinsiz kopyalamaya ve çoğaltmaya karşı notere tasdik ettirilmiştir. Ders notunun tüm hakları saklıdır. Ders notunun fotokopi ile çoğaltılıp-ciltletilmesi için yazarından yazılı olarak izin alınması zorunludur.

Bu ders notu, kitap değildir ve yazarın özgün fikirlerini içermektedir. Kaynaklardan alınan bilgiler için kaynak isimleri her bölümün "özet bilgiler" kısmında verilmiştir.

KÜTLE VE BERNOULLI DENKLEMLERİ

Bu bölümün temelini **kütle ve Bernoulli denklemleri** ve uygulamaları oluşturmaktadır. Bir enkesitten birim zamanda geçen kütle miktarına **kütlesel debi** denir ve ρ yoğunluk (kg/m^3), V akışkanın ortalama hızı (m/s), V_n normal doğrultudaki hız (m/s) ve A_k akışa dik yöndeki enkesit alanı (m^2) olmak üzere aşağıda verilen eşitlik ile yazılır.

$$\dot{m} = \int_{A_k} \rho V_n dA_k = \rho V A_k \quad [\text{kg/s}]$$

Hacimsel debi (\dot{V}) için aşağıda verilen eşitlik ve v özgül hacim (m^3/kg) olmak üzere hacimsel debi ile kütlesel debi arasında aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$\dot{V} = \int_{A_k} V_n dA_k = V A_k \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad [\dot{V} = \dot{m}/\rho = \dot{m}v]$$

KY, kontrol yüzeyi olmak üzere, bir kontrol hacmi (KH) için kütle korunumu bağıntısı aşağıda verildiği gibi ifade edilir:

$$\frac{d}{dt} \int_{KH} \rho dV + \int_{KY} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dm_{KH}}{dt} = \sum_{\text{giren}} \dot{m} - \sum_{\text{çıkan}} \dot{m}$$

Bu denklem kontrol hacminin içerisindeki kütle zamanla bağlı değişim hızı ile kontrol yüzeyinden olan net kütle geçişinin toplamının sıfıra eşit olduğunu ifade eder. **Sürekli** (daimi) akış makineleri için kütle korunumu ilkesi aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

Sürekli akış: $\sum_{\text{giren}} \dot{m} = \sum_{\text{çıkan}} \dot{m}$ (Giriş ve çıkıştaki toplam kütlesel debiler eşittir)

Sürekli akış (tek akımlı): $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho_1 V_1 A_{k1} = \rho_2 V_2 A_{k2}$ (Kütlesel debiler eşittir)

Sürekli, sıkıştırılamaz akış: $\sum_{\text{giren}} \dot{V} = \sum_{\text{çıkan}} \dot{V}$ (Giriş ve çıkıştaki toplam hacimsel debiler eşittir)

Sürekli, sıkıştırılamaz akış (tek akımlı): $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \rightarrow V_1 A_{k1} = V_2 A_{k2}$ (Hacimsel debiler eşittir)

Mekanik enerji akışkanın hızı, yüksekliği ve basıncıyla ilgili enerji biçimidir ve ideal bir makina ile tamamen ve doğrudan mekanik işe dönüştürülebilir. $\dot{W}_{\text{pompa,f}}$ faydalı pompalama gücü ve $\dot{W}_{\text{türbin,ç}}$ türbin tarafından akışkandan çekilen güç olmak üzere çeşitli makinelerin verimleri aşağıda tanımlandığı gibidir:

$$\Delta \dot{E}_{\text{mek,akışkan}} = \dot{m} \left[(P_2 - P_1) / \rho + (V_2^2 - V_1^2) / 2 + g(z_2 - z_1) \right] \quad (W) \text{ olmak üzere,}$$

$\eta_{\text{pompa}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mek,akışkan}}}{\dot{W}_{\text{mil,giren}}} = \frac{\dot{W}_{\text{pompa,f}}}{\dot{W}_{\text{pompa}}}$	$\eta_{\text{türbin}} = \frac{\dot{W}_{\text{mil,çıkan}}}{ \Delta \dot{E}_{\text{mek,akışkan}} } = \frac{\dot{W}_{\text{türbin}}}{\dot{W}_{\text{türbin,ç}}}$
$\eta_{\text{motor}} = \frac{\dot{W}_{\text{mil,çıkan}}}{\dot{W}_{\text{elektrik,giren}}}$	$\eta_{\text{jeneratör}} = \frac{\dot{W}_{\text{elektrik,çıkan}}}{\dot{W}_{\text{mil,giren}}}$
$\eta_{\text{pompa-motor}} = \eta_{\text{pompa}} \eta_{\text{motor}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mek,akışkan}}}{\dot{W}_{\text{elektrik,giren}}} = \frac{\dot{W}_{\text{pompa,f}}}{\dot{W}_{\text{elektrik,giren}}}$	
$\eta_{\text{türbin-jeneratör}} = \eta_{\text{türbin}} \eta_{\text{jeneratör}} = \frac{\dot{W}_{\text{elektrik,çıkan}}}{ \Delta \dot{E}_{\text{mek,akışkan}} } = \frac{\dot{W}_{\text{elektrik,çıkan}}}{\dot{W}_{\text{türbin,ç}}}$	

Bernoulli denklemi sürekli, sıkıştırılamaz akışlarda basınç, hız ve yükseklik arasındaki bağıntıdır, bir akım çizgisi boyunca ve net viskoz kuvvetlerin ihmal edilebilir olduğu bölgelerde aşağıda verildiği gibi ifade edilir:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit} \quad [J/kg]$$

Ayrıca, bir akım çizgisi üzerindeki herhangi iki noktasında da aşağıda verildiği gibi yazılabilir:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Bernoulli denklemi, mekanik enerji dengesinin bir ifadesidir ve aşağıda verildiği gibi açıklanabilir: Bir akışkan parçacığının, bir akım çizgisi boyunca, sürekli akış esnasında, sıkıştırılabilirlik ve sürtünme etkileri ihmal edildiğinde; kinetik, potansiyel ve akış enerjilerinin toplamı sabittir. Bernoulli denklemi yoğunluk ile çarpılırsa aşağıda verilen eşitlik elde edilir:

$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{sabit} \quad [Pa]$$

Yukarıda verilen denklemde P, akışkanın gerçek basıncını gösteren **statik basınç**, $\rho V^2/2$, akışkan hareket halindeyken durmaya zorlandığında akışkanda meydana gelen basınç artışını gösteren **dinamik basınç** ve ρgz ise akışkan ağırlığının basınç üzerindeki etkisini dikkate alan, **hidrostatik basınçtır**.

Statik, dinamik ve hidrostatik basınçların toplamı **toplam basınç** olarak adlandırılır. Bernoulli denklemi bir akım çizgisi boyunca toplam basıncın sabit olduğunu ifade eder. Statik ve dinamik basınçların toplamına **durma basıncı** denir.

Akışkanın sürtünmesiz halde tamamen durmaya zorlandığı noktadaki basıncı gösterir. Bernoulli denklemi ayrıca, her bir terimi yerçekimi ivmesine bölmek suretiyle “yükler” cinsinden de yazılabilir.

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{sabit} \quad [\text{m}]$$

Yukarıda verilen denklemde $P/\rho g$, statik basıncı oluşturan akışkan sütunun yüksekliğini ifade eden **basınç yükü**, $V^2/2g$, bir akışkanın serbest düşmesi esnasında V hızına ulaşması için gerekli olan yüksekliği ifade eden **hız yükü**, z ise akışkanın potansiyel enerjisini ifade eden **yükseklik yüküdür**. Ayrıca, H akışın **toplam yüküdür**. Statik basınç ve yükseklik yüklerinin toplamını ($P/\rho g + z$ değerini) gösteren çizgi **hidrolik eğim çizgisi** (HEÇ) ve akışkanın toplam yükünü ($P/\rho g + V^2/2g + z$ değerini) gösteren çizgi de **enerji eğim çizgisi** (EEÇ) olarak adlandırılır.

Önemli Konular:

- Kütlelen korunumu (Kütleli ve hacimsel debi, Sürekli akış)
- Mekanik enerji ve verim
- Bernoulli denklemi (Statik, dinamik ve durma basınçları, Bernoulli denkleminin kullanımındaki sınırlamalar, Hidrolik ve enerji eğim çizgileri)
- Bernoulli denkleminin uygulamaları

Çalışma Soruları:

1. Debi, kütleli debi ve hacimsel debi nedir? Açıklayınız.
2. Sürekli akış nedir? Açıklayınız.
3. Mekanik enerji ve mekanik verim nedir? Açıklayınız.
4. Bernoulli denkleminin türetilmesinde kullanılan üç ana kabulü yazınız.
5. Bernoulli denklemini enerji, basınç ve yük cinsinden yazınız.
6. Statik, dinamik, hidrostatik ve durma basıncı nedir? Açıklayınız.
7. Hidrolik eğim çizgisi nedir? Şekil çizerek açıklayınız.

Kaynaklar:

1. Cengel YA, Cimbala JM, “Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications”, Second Edition (SI), McGraw-Hill, 2010.
2. Fox RW, Pritchard PJ, McDonald AT, “Introduction to Fluid Mechanics”, 7th Edition (SI), Wiley, 2010.
3. Crowe CT, Elger DF, Williams BC, Roberson JA, Engineering Fluid Mechanics, 9th Edition, Wiley, 2010.

BERNOULLI DENKLEMİNİN KULLANIMINDAKİ SINIRLAMALAR

Akım çizgisi, belirli bir anda bir akışkanın hız alanındaki hız vektörlerine her yerde teğet olan eğridir. Dolayısıyla akım çizgileri, her bir noktadaki akışkan hareketinin yönünü gösterir. Sürekli akışta akım çizgileri zamanla değişmez. Sürekli sıkıştırılmaz bir akış için bir akım çizgisi boyunca aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$\text{Bernoulli denklemi: } \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit}$$

Yukarıda verilen Bernoulli denkleminin uygulanabilirliğindeki sınırlayıcı koşullar ve kullanılabilirliğindeki sınırlamalar aşağıda verildiği gibidir:

1.Sürekli Akış: Bernoulli denkleminin kullanımındaki ilk sınırlama sadece sürekli akışa uygulanabilir olmasıdır. Bu yüzden, kısa süreli devreye alma ve kapatma süreleri ya da akış şartlarında değişimin olduğu süreler boyunca kullanılmamalıdır. Bernoulli denkleminin sürekli olmayan akışlar için türetilmiş formu da vardır.

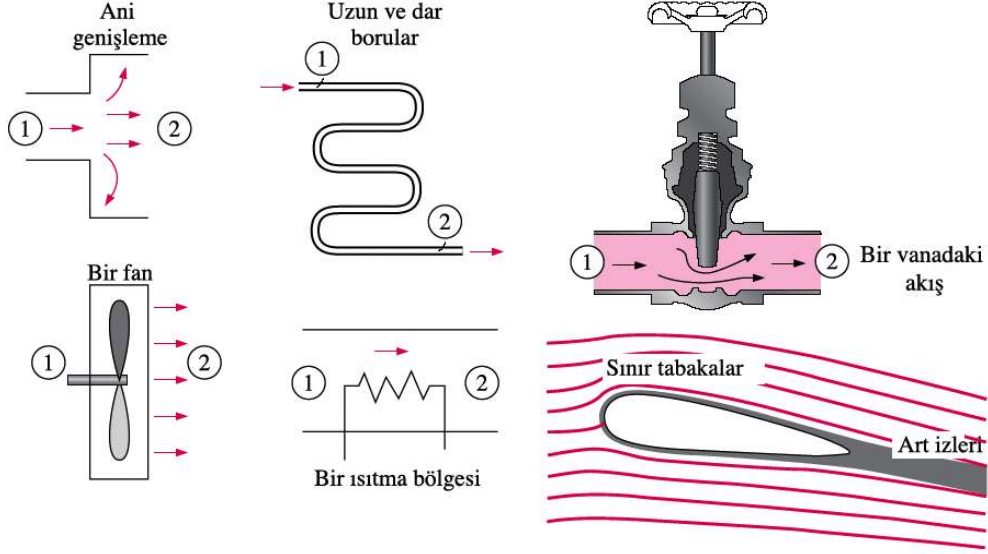
$$\text{Sürekli olmayan-sıkıştırılabilir akış: } \int \frac{dP}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit}$$

2.Sürtünmesiz Akış: Ne kadar küçük olursa olsun her akışta bir miktar sürtünme vardır ve sürtünme etkilerinin göz önüne alındığı veya alınmadığı durumlar olabilir. Genel olarak, özellikle düşük akış hızlarında, büyük en-kesitli ve kısa akış kesimlerindeki sürtünme etkileri göz önüne alınmaz. Sürtünme etkileri genellikle uzun ve dar akış geçitlerinde, bir cismin aşağı akımındaki art izi bölgelerinde ve (çeperlerinden akışkanın ayrılma olasılığının yüksek olmasından dolayı) yayıcılar gibi ayrılmanın olduğu akış kesimlerinde önemlidir. Sürtünme etkileri, ayrıca katı cismin yüzeyleri yakınında önemlidir ve bu yüzden Bernoulli denklemi akışın merkez bölgelerindeki bir akım çizgisi boyunca uygulanabilir. Bunun yanında akışın yüzeye yakın bölgelerindeki bir akım çizgisi boyunca uygulanamaz.

Akışın akım çizgili yapısını bozarak, bir boruya keskin giriş veya akış kesiminde bulunan kısmen kapalı bir vana gibi önemli ölçüde karışmaya ve geri-akışa yol açan bir unsur Bernoulli denklemini uygulanamaz kılar.

3.Mil işinin olmaması: Bernoulli denklemi, bir akım çizgisi boyunca hareket eden akışkan parçacığı üzerine uygulanan kuvvet dengesinden türetilmiştir. Bu yüzden Bernoulli denklemi pompa, türbin, fan ya da başka bir makina ya da çark gibi akım çizgilerinin bozulmasına neden olan ve akışkan parçacıklarıyla enerji etkileşimine giren makinaların bulunduğu akış kesimlerinde uygulanamaz. Göz önüne alınan akış kesiminde bu makinaların bulunması durumunda, mil işi giriş çıkışını hesaba katmak için bunun yerine enerji denklemi kullanılmalıdır.

Öte yandan, Bernoulli denklemi (kullanımı üzerindeki diğer sınırlayıcı şartların sağlanması koşuluyla) yine de makinanın öncesindeki ve sonrasındaki akış kesimlerine uygulanabilir. Bu durumlarda Bernoulli sabiti makinanın yukarı akımında ve aşağı akımında farklı değerler olacaktır.



Bir akış kesiminde akım çizgili yapıyı bozarak Bernoulli denklemini geçersiz kılan elemanlar ve sürtünme etkileri

4.Sıkıştırılmaz akış: Bernoulli denkleminin türetilmesinde yapılan kabullerden birisi de $\rho =$ sabit ve bunun sonucu olarak akışın sıkıştırılmaz olduğudur. Bu şart, sıvılarda ve ayrıca Mach sayısı 0.3 değerinden küçük olan gazlarda sağlanır. Gazların sıkıştırılabilirlik etkileri ve bunun sonucunda yoğunluk değişimleri göreceli olarak düşük hızlarda göz önüne alınmayabilir. Bernoulli denkleminin sıkıştırılabilir akış için türetilmiş şekilleri aşağıda verildiği gibidir.

$$\text{Sürekli akış: } \int \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit (Bir akım çizgisi boyunca)}$$

$$\text{Sürekli olmayan-sıkıştırılabilir akış: } \int \frac{dP}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit}$$

5.İsı transferinin olmaması: Gazın yoğunluğu sıcaklıkla ters orantılıdır ve bu nedenle Bernoulli denklemi ısıtma ve soğutma kesimleri gibi önemli oranda sıcaklık değişimlerinin söz konusu olduğu akış bölgelerinde kullanılmamalıdır.

6.Bir akım çizgisi boyunca akış: Bernoulli denklemi, $P/\rho + V^2/2 + gz = C$ bir akım çizgisi boyunca uygulanabilir ve C sabiti, genellikle farklı akım çizgileri için farklı değerler alır. Fakat, akış bölgesinin dönümsüz olduğu ve bu nedenle çevrintinin oluşmadığı akış alanlarında C sabitinin değeri tüm akım çizgileri için aynı kalır. Bu durumda Bernoulli denklemini akım çizgilerine dik yönde de uygulanabilir.

Akış dönümsüz olduğunda Bernoulli denklemini, dönümsüz akış bölgelerinde herhangi iki nokta arasında uygulanabilir.

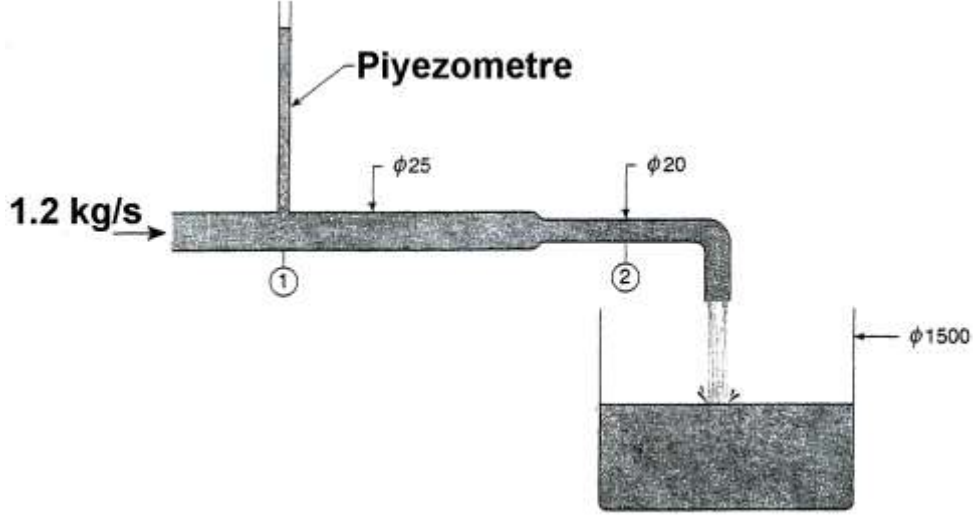
Bernoulli denklemini, basit bir şekilde xz-düzlemindeki akış iki-boyutlu kabul edilerek türetilmiştir. Fakat denklem aynı akım çizgisi boyunca uygulanmak suretiyle genel üç boyutlu akış için de geçerlidir.



$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Akış dönümsüz olduğunda Bernoulli denklemi akış boyunca herhangi iki nokta arasında uygulanabilir

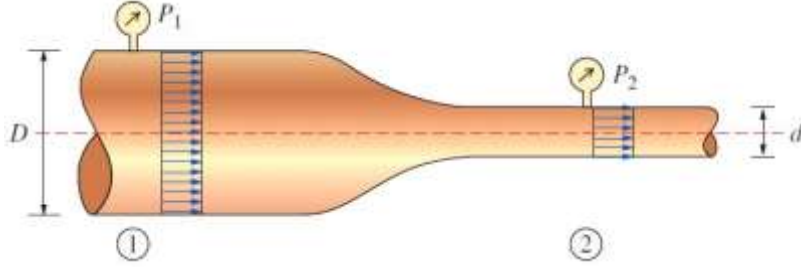
Soru: Şekil ile verildiği gibi bağıl yoğunluğu **0.8** olan bir sıvı, **1.2 kg/s** debi ile bir boru sisteminde akmaktadır. 1 noktası olarak gösterilen yerde borunun merkezindeki mutlak basıncı **110 kPa** olarak aşağıda tablo olarak verilen soruları yanıtlayınız. [Piyezometre ve havuzun üst tarafı atmosfere açıktır].



Soru	Hesaplama Sonuçları
1 noktasındaki akışkan hızını [m/s] olarak hesaplayınız ve bulduğunuz sonucu yan tarafa yazınız.	
2 noktasındaki akışkan hızını [m/s] olarak hesaplayınız ve bulduğunuz sonucu yan tarafa yazınız.	
1 noktasına bağlanan piyezometredeki yüksekliği [m] olarak hesaplayınız ve bulduğunuz sonucu yan tarafa yazınız.	
Havuzdaki sıvı hacminin 6 m³ değerine ulaşması için gereken süreyi [saat] olarak hesaplayınız ve bulduğunuz sonucu yan tarafa yazınız.	
Havuz 6 m³ hacmindeki sıvı ile dolduğunda oluşan havuz yüksekliğini [m] olarak hesaplayınız ve bulduğunuz sonucu yan tarafa yazınız.	
Havuz 6 m³ hacmindeki sıvı ile dolduğunda havuz tabanında oluşan etkin ve mutlak basıncı [kPa] olarak hesaplayınız ve bulduğunuz sonuçları yan tarafa yazınız.	

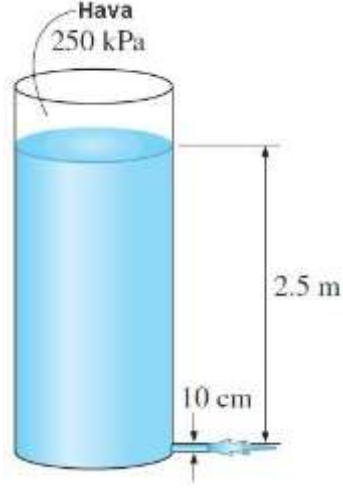
SORULAR

Soru 1: 40°C sıcaklığındaki hava, şekil ile verildiği gibi boru içinde kararlı (sürekli) bir şekilde akmaktadır. 1 noktasındaki etkin basınç **50 kPa**, 2 noktasındaki etkin basınç **10 kPa**, $D = 3d$, atmosfer basıncı **100 kPa** ve 2 noktasındaki hız **30 m/s** olduğuna ve havanın sıcaklığı sabit kaldığına göre 1 noktasındaki ortalama hızı [**m/s**] olarak hesaplayınız.



Açıklama: Sorunun çözümünde havanın sıkıştırılabilir bir akışkan olduğu göz önüne alınmalıdır. Bir akım çizgisi boyunca sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz akışkanlarda kütleli debinin değişmeyeceği unutulmamalıdır.

Soru 2: Basıncılı bir su deposunun tabanında suyun atmosfere boşaldığı **10 cm** çapında bir boru bağlantısı vardır. Su seviyesi çıkıştan **2.5 m** yüksektedir. Su yüzeyinin üzerindeki mutlak hava basıncı **250 kPa** ve atmosfer basıncı ise **100 kPa** değerindedir. Sürtünme etkilerini ihmal ederek depodan boşalan suyun başlangıçtaki debisini [**m³/s**] olarak belirleyiniz.



Açıklama: Büyük bir deponun tabanına yapılan küçük çaplı boru bağlantılarına (tabanda küçük çaplı bir delik de açılabilir) orifis denir. Hacimsel debi, orifisin çapı ve orifisten çıkan suyun hızı dikkate alınarak hesaplanabilir. Orifis çıkışındaki suyun hızı ise su serbest yüzeyi ve orifis çıkışı arasında Bernoulli denklemi yazılarak hesaplanabilir. Silindirik deponun çapı, orifis çapından çok büyük olduğu için serbest su yüzeyinin azalma hızı değeri yaklaşık sıfır olarak alınabilir.

Soruların çözümleri sonrası yapılabilecek yorumlar aşağıda verildiği gibi olabilir:

Kütlenin korunumu:

Gazlar gibi sıkıştırılabilir akışkanlarda sadece kütleli debi eşitliği kullanılır. Sıvılar gibi sıkıştırılmaz akışkanlarda ise kütleli ve hacimsel debi eşitlikleri kullanılabilir.

Sürekli akışta farklı iki noktada sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz akışkanlar için yoğunluk (ρ), kesit alanı (A) ve hız değişebilir (V) ama kütleli debi (\dot{m}) değeri değişmez:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \text{ (Süreklilik denklemi)}$$

Mekanik enerji ve verimlilik:

Termodinamiğin ikinci yasası gereği gerçek akış makinelerinde sürtünme kayıpları gibi nedenlerden dolayı verim %100 olamaz. P basınç, z yükseklik, g yerçekimi ivmesi, P/ρ akış enerjisi, $V/2$ kinetik enerji ve gz potansiyel enerji olmak üzere, bir akışa ait mekanik enerji aşağıda verilen eşitlik ile hesaplanır:

$$\dot{e}_{\text{mek,akışkan}} = P/\rho + V/2 + gz \text{ (J/kg)}$$

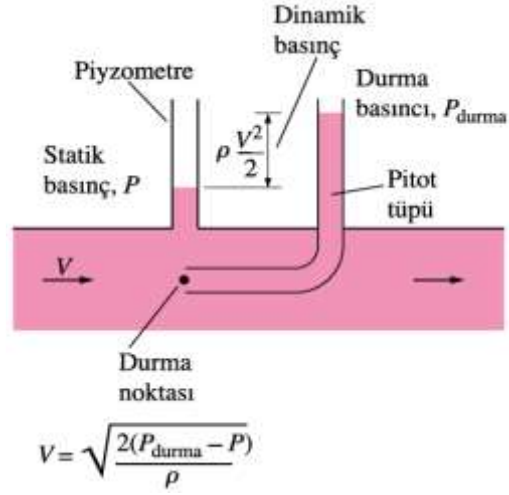
Bir akışın üretebileceği en fazla (maksimum) güç, $\dot{W}_{\text{maks}} = \dot{E}_{\text{mekanik}} = \dot{m}e_{\text{mekanik}}$ (W) eşitliği ile hesaplanır. Gerçekte bu eşitlikten elde edilen değere kayıplardan dolayı ulaşamaz. Bir akışa ait mekanik enerji kaybı ise u iç enerji ve q ısı enerjisi olmak üzere aşağıda verilen eşitlik ile hesaplanır:

$$e_{\text{mek kayıp}} = u_2 - u_1 - q_{\text{net giren}} \text{ [J/kg]}$$

Bernoulli denklemi:

Bernoulli denklemi, bir akım çizgisi boyunca olan kararlı (sürekli) akış için geçerlidir. Bernoulli denkleminde sürtünmenin oluşturduğu etkiler göz önüne alınmaz ve akış sıkıştırılmaz kabul edilir. Ma sayısının 0.3 değerinden büyük olduğu durumlarda Bernoulli denklemi geçerli değildir.

Akış alanı içinde hız değerinin sıfır olduğu noktaya durma noktası denir. P statik basınç, $\rho V/2$ dinamik basınç ve ρgz hidrostatik basınç olmak üzere, statik ve dinamik basıncın toplamına durma basıncı denir. Durma basıncı **pitot tüpü** ile ölçülür. Statik basınç ise **piyometre** ile ölçülür. Durma basıncı ve statik basınç ölçülerek akışın hızı hesaplanır.



Statik basınç ve yükseklik yüklerinin toplamını ($P/\rho g + z$ değerini) gösteren çizgi hidrolik eğim çizgisi (HEÇ) ve akışkanın toplam yükünü ($P/\rho g + V^2/2g + z$ değerini) gösteren çizgi de enerji eğim çizgisi (EEÇ) olarak adlandırılır. HEÇ akış boyunca, boru veya kanalın kesit alanındaki azalma veya artmaya göre artar veya azalır. EEÇ ise akış boyunca akışkana enerji verilmediği sürece sabit kalır veya azalır.